

Θέμα 1ο (25%)

α) (5%) Δίνεται η πρόταση "Το πεδίο $F(x,y) = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ είναι αστρόβιλο". Δώστε όσες περισσότερες προτάσεις ισχύουν με την παραπάνω πρόταση μπορείτε.

β) (20%) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο δύο διαστάσεων

$$F(x,y) = (xy^2 + x)\mathbf{i} + (x^2y)\mathbf{j}$$

- Δείξτε ότι το πεδίο είναι αστρόβιλο.
- Υπολογίστε τη συνάρτηση δυναμικού $\Phi(x,y)$.
- Υπολογίστε το έργο της δύναμης του πεδίου κατά τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της από το σημείο $A(1,1)$ στο $B(2,2)$. Εξαρτάται το αποτέλεσμα σας από τη διαδρομή που ενώνει τα σημεία αυτά;
- Ποια η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος $I = \oint_C F(x,y) \cdot dx$, όπου C τυχαία κλειστή διαδρομή;
- Συμπεράνετε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(xy^2 + x) dx + (x^2y) dy = 0$$

και δώστε τη φυσική ερμηνεία των λύσεων.

Θέμα 2ο (10%)

Βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το μετασχηματισμό $x = e^t$

Θέμα 3ο (30%) Ένα γραμμικό κύκλωμα δέχεται την ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y =$$

- Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του
- Βρείτε την κρουστική απόκριση $y'(t)$ και την απόκριση $y(t) = g(t)$ για αρχικές συνθήκες θεωρούνται ίσες με το μηδέν.

- Δώστε μια ισοδύναμη περιγραφή του κυκλώματος στο χώρο των φάσεων (5%).

Θέμα 4ο (30%)

α) (25%) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογίστε τον πίνακα $\exp(At)$ χρησιμοποιώντας:
Hamilton, ii) Διαγωνιοποίηση του πίνακα και iii) Μετασχηματισμό.
β) (5%) Εξετάστε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης του Αχ. Τί είδους σημείο είναι το $(0,0)$; Τέλος, σχεδιάστε το πορτρέτο φάσεων των λύσεων του συστήματος υπολογίζοντας αναλυτικά τις τροχιές των λύσεων του συστήματος.

Θέμα 5ο (15%)

α) (5%) Δίνεται το μη γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned}$$

για το οποίο υποθέτουμε ότι οι $f(x, y)$ και $g(x, y)$ ανήκουν σε μια περιοχή του $(0, 0)$ με $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$.
Γραμμικοποιείται στην περιοχή του $(0, 0)$ με πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} f_x(0, 0) & f_y(0, 0) \\ g_x(0, 0) & g_y(0, 0) \end{bmatrix}$$

β) (5%) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, εξετάστε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης του συστήματος.
γ) (5%) Εξετάστε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης του συστήματος $f(x, y) = -2xy$, $g(x, y) = -2xy$ χρησιμοποιώντας το παραπάνω.