

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2025

Θέμα 1ο (1.0)

Σ/Λ με συνοπτική αιτιολόγηση

	Σ	Λ
1. Αν $z = x + yi$ όπου i είναι η φανταστική μονάδα, τότε $ z ^2 = x^2 - y^2$		
2. Αν $\gamma: z =1$ τότε $\oint_{\gamma} \frac{1}{z-3} dz = 0$		
3. Αν i είναι η φανταστική μονάδα, τότε $\frac{1}{i^9} + \frac{1}{i^{13}} = 2i$		
4. Αν η εφαπτομένη μιας καμπύλης $r(t)$ είναι κάθετη στη θέση $r(t)$ για κάθε t , τότε η καμπύλη βρίσκεται πάνω σε ευθεία.		
5. Αν $f(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)$ με κυκλικές συχνότητες $\omega_1 = 2$ και $\omega_2 = 3$, τότε η συνάρτηση $f(t)$ είναι περιοδική		

ΘΕΜΑ 2ο (1.5)

α) Να υπολογίσετε την παράσταση: $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, να εκφράσετε το αποτέλεσμα σε καρτεσιανή μορφή και να βρείτε τον συζυγή μιγαδικό του αποτελέσματος. (0,5)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $z^4 = -1$ στο μιγαδικό επίπεδο και να αποδείξετε ότι οι ρίζες σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιο 2. (1.0)

ΘΕΜΑ 30 (2.0)

α) Να δείξετε ότι $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=3} \frac{z \cos(zt)}{z^2+1} dz = \cosh(t)$, $t \in \mathbb{R}$

Σημείωση: $\cos(it) = \cosh(t)$

β) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(z) = \operatorname{Re}(z) \cdot z^2$, $z = x + iy$ είναι αναλυτική και στη συνέχεια, να βρεθεί η παράγωγός της, όπου αυτή ορίζεται.

Θέμα 40 (2.0)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(e^y - 1 - y) \cdot y^2 - (e^x - 1 - x) \cdot x^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους f_x και f_y

β) Να αποδείξετε ότι $f_{xx}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$.