

Μαθηματικά Ι Διδάσκων: Γ. Νικολέντζος		
Χειμώνας 2026	ΕΞΕΤΑΣΗ Φεβρουαρίου	Διάρκεια: 3 ώρες

Ονοματεπώνυμο: _____

Αριθμός Μητρώου: _____

Ερώτημα 1 (1 μονάδα)

Αποδείξτε με χρήση επαγωγής ότι $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λύση: Ακολουθούμε τα δυο βήματα της απόδειξης με επαγωγή.

1. Αρχικά, θα δείξουμε ότι η $p(1)$ είναι αληθής. Για $n = 1$, έχουμε:

$$2^{1-1} = 2^0 = 1 = 2^1 - 1$$

Άρα η $p(1)$ είναι αληθής.

2. Υποθέτουμε ότι η για κάποιο φυσικό k , η $p(k)$ είναι αληθής. Συνεπώς, ισχύει το παρακάτω:

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

είναι επίσης αληθής. Έχουμε:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1} + 2^k &= (2^0 + 2^1 + \dots + 2^{k-1}) + 2^k \\ &= 2^k - 1 + 2^k \\ &= 2(2^k) - 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, η πρόταση είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ερώτημα 2 (1 μονάδα)

Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω σειρών:

$$(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n} \quad (\gamma) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1} \right)$$

Λύση:

(α) Έχουμε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

Η σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $1/2$. Συνεπώς, συγκλίνει στην παρακάτω τιμή:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 4 \frac{1}{1-1/2} = 4 \cdot 2 = 8$$

(β) Έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \frac{(-1)^n}{4^n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n$$

Η σειρά είναι γεωμετρική με λόγο $-1/4$. Συνεπώς, συγκλίνει στην παρακάτω τιμή:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{4}\right)^n = 5 \left(\frac{1}{1-(-1/4)} - \left(\frac{-1}{4}\right)^0 \right) = 5 \left(\frac{4}{5} - 1 \right) = -1$$

(γ) Η συγκεκριμένη σειρά είναι τηλεσκοπική με $b_n = (n-1)/n$. Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1} \right) = b_2 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \frac{2-1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

μιας και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Ερώτημα 3 (1 μονάδα)

Να εξεταστεί αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμιά από τις παρακάτω σειρές:

$$(\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \quad (\beta) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3} \quad (\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

Λύση:

(α) Έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n}{1} = 1 \neq 0$$

Συνεπώς, η συγκεκριμένη σειρά αποκλίνει.

(β) Η συγκεκριμένη σειρά είναι εναλλασσόμενη. Έχουμε ότι $\frac{n^2+1}{n^3} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$. Επίσης ισχύει ότι $\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3} < \frac{n^2+1}{n^3}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 1$. Επιπλέον, έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n + 1/n^3}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Συνεπώς, από το κριτήριο της εναλλασσόμενης σειράς, η συγκεκριμένη σειρά συγκλίνει.

(γ) Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου κι έχουμε:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} \right| = \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} \right| = \left| \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

Έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1/n}{1} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1$$

Μιας και το παραπάνω όριο είναι μικρότερο από 1, η σειρά συγκλίνει.

Ερώτημα 4 (0.5 μονάδες)

Αποδείξτε με χρήση του $\epsilon - \delta$ ορισμού του ορίου ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5x - 3) = 2$$

Λύση:

Βήμα 1: Εύρεση του δ . Έχουμε $x_0 = 1$ και $L = 2$. Για $\epsilon > 0$, χρησιμοποιούμε την ανισότητα $|(5x - 3) - 2| < \epsilon$ για να βρούμε μια ανισότητα της μορφής $|x - 1| < \delta$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} |(5x - 3) - 2| &< \epsilon \\ \Leftrightarrow |5x - 5| &< \epsilon \\ \Leftrightarrow 5|x - 1| &< \epsilon \\ \Leftrightarrow |x - 1| &< \frac{\epsilon}{5} \end{aligned}$$

Η παραπάνω ανισότητα μας δίνει μια σχέση μεταξύ δ και ϵ , δηλαδή $\delta = \epsilon/5$.

Βήμα 2: Απόδειξη. Για $\epsilon > 0$, υποθέτουμε ότι $0 < |x - 1| < \delta$, όπου $\delta = \epsilon/5$. Σκοπός είναι να δείξουμε ότι $|(5x - 3) - 2| < \epsilon$ για όλα τα x για τα οποία $0 < |x - 1| < \delta$. Έχουμε

$$|(5x - 3) - 2| = |5x - 5| = 5|x - 1| < 5\left(\frac{\epsilon}{5}\right) = \epsilon$$

Ερώτημα 5 (1 μονάδα)

Να υπολογιστούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

$$(\alpha) \int \cos(7x + 5) dx \quad (\beta) \int e^x \cos x dx \quad (\gamma) \int \frac{5x + 11}{(x + 2)^2} dx$$

Λύση:

(α) Θέτουμε $u = 7x + 5$, κι έχουμε $\frac{du}{dx} = 7$, δηλαδή $dx = \frac{du}{7}$. Αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα κι έχουμε:

$$\int \cos(7x + 5) dx = \int \cos u \frac{du}{7} = \frac{1}{7} \int \cos u du = \frac{1}{7} \int (\sin u)' du = \frac{1}{7} \sin u + C$$

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x (\sin x)' dx = e^x \sin x + C - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x + \int e^x (\cos x)' dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C - \int e^x \cos x dx$$

Το άγνωστο ολοκλήρωμα έχει εμφανιστεί στο δεξί μέλος με αντίθετο πρόσημο. Το μεταφέρουμε στο αριστερό μέλος κι έχουμε:

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x + C \Rightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x + C}{2} = \frac{e^x (\sin x + \cos x) + C}{2} =$$

(γ) Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα κι έχουμε

$$\frac{5x + 11}{(x + 2)^2} = \frac{A_1}{x + 2} + \frac{A_2}{(x + 2)^2} = \frac{A_1(x + 2) + A_2}{(x + 2)^2}$$

Από την παραπάνω ισότητα παίρνουμε:

$$5x + 11 = A_1(x + 2) + A_2 = A_1x + (2A_1 + A_2)$$

Από το παραπάνω προκύπτει ότι $A_1 = 5$ και $A_2 = 1$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των A_1 και A_2 , έχουμε:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+11}{(x+2)^2} dx &= \int \left[\frac{5}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2} \right] dx \\ &= 5 \int \frac{dx}{x+2} + \int (x+2)^{-2} dx\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, θέτουμε $u = x+2$, κι έχουμε $\frac{du}{dx} = 1$, δηλαδή $dx = du$. Συνεπώς, έχουμε:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x+11}{(x+2)^2} dx &= 5 \int \frac{dx}{x+2} + \int (x+2)^{-2} dx \\ &= 5 \int \frac{du}{u} + \int u^{-2} du \\ &= 5 \log|x+2| - u^{-1} + C \\ &= 5 \log|x+2| - (x+2)^{-1} + C\end{aligned}$$

Ερώτημα 6 (0.5 μονάδες)

Να υπολογιστεί το πολυώνυμο Taylor βαθμού 3 της συνάρτησης $f(x) = \log(1+2x)$ γύρω από το σημείο 1. Στη συνέχεια, να χρησιμοποιηθεί το πολυώνυμο για να προσεγγιστεί το $f(3/2)$. Ποιό είναι το σφάλμα της προσέγγισης ($f(3/2) = \log(1+2(3/2)) = \log 4 \approx 1.3862$);

Λύση: Το πολυώνυμο είναι το εξής:

$$P_3(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}f(x) &= \log(1+2x) \quad \text{και} \quad f(1) = \log 3 \\ f'(x) &= \frac{2}{1+2x} \quad \text{και} \quad f'(1) = \frac{2}{3} \\ f''(x) &= -\frac{4}{(1+2x)^2} \quad \text{και} \quad f''(1) = -\frac{4}{9} \\ f'''(x) &= \frac{16}{(1+2x)^3} \quad \text{και} \quad f'''(1) = \frac{16}{27}\end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, το πολυώνυμο Taylor βαθμού 3 είναι:

$$P_3(x) = \log 3 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{4}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{16}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 = \log 3 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{9}(x-1)^2 + \frac{8}{81}(x-1)^3$$

Η προσέγγιση που προκύπτει είναι:

$$P_3\left(\frac{3}{2}\right) = \log 3 + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - 1\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + \frac{8}{81}\left(\frac{3}{2} - 1\right)^3 \approx 1.4998$$

Το σφάλμα της προσέγγισης είναι $|f(3/2) - P_3(3/2)| \approx |1.3862 - 1.4998| = 0.1136$.

Ερώτημα 7 (1 μονάδα)

Να αναπτυχθούν σε δυναμοσειρά γύρω από το 0 οι παρακάτω συναρτήσεις και να βρεθούν οι ακτίνες σύγκλισής τους (χρησιμοποιήστε το ανάπτυγμα της σειράς $1/(1-x)$ στο ερώτημα (α)):

$$(\alpha)f(x) = \frac{1}{2-3x} \quad (\beta)g(x) = \frac{1}{(2-3x)^2} \quad (\gamma)h(x) = \cos^2 x \quad \left(\text{Θυμηθείτε ότι } \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \right)$$

Λύση:

(α) Η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$f(x) = \frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2(1-(3/2)x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(3/2)x}$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο της γεωμετρικής σειράς με το $(3/2)x$ στη θέση του x . Αν λοιπόν $|(3/2)x| < 1$ ή ισοδύναμα αν $|x| < 2/3$, έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}x\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} x^n$$

και η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2/3$.

(β) Γνωρίζουμε ότι $f'(x) = \frac{3}{(2-3x)^2} = 3g(x)$ δηλαδή $g(x) = f'(x)/3$. Έχουμε αναπτύξει την f σε δυναμοσειρά στο (α). Από το θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών, έχουμε:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{2^{n+1}} x^{n-1}$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{2^{n+1}} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n-1}}{2^{n+1}} x^{n-1}$$

Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2/3$.

(γ) Χρησιμοποιούμε το γνωστό ανάπτυγμα της $\cos x$ σε δυναμοσειρά και αντικαθιστούμε το x με $2x$ από όπου προκύπτει:

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

Συνεπώς έχουμε ότι:

$$h(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \right) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2 \cdot (2n)!}$$

και η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης $R = \infty$.

Ερώτημα 8 (1 μονάδα)

Να εξεταστεί αν ο παρακάτω πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, και αν είναι, να υπολογιστεί ο αντίστροφός του A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Λύση: Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A . Επιλέγουμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή κι έχουμε:

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(1 \cdot 3 - 1 \cdot 0) + (-1)(5 \cdot 1 - 0 \cdot 1) \\ &= 6 - 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Μιας και $\det A \neq 0$, ο πίνακας A αντιστρέφεται. Ο αντίστροφός μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$$

Συνεπώς, αρκεί να υπολογίσουμε τον $\operatorname{adj}(A)$. Αρχικά υπολογίζουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων του A .

$$\begin{aligned}
c_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 & c_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -15 \\
c_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 & c_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \\
c_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 & c_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\
c_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 & c_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \\
c_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2
\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο προσαρτημένος του A είναι:

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο αντίστροφος είναι:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A) = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ερώτημα 9 (1 μονάδα)

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Λύση: Ξεκινάμε με τον πίνακα A . Επιλέγουμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς την δεύτερη γραμμή και έχουμε:

$$\det A = 7 \cdot (-1)^{2+5} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Την νέα ορίζουσα που προκύπτει την αναπτύσσουμε ως προς την τέταρτη γραμμή και έχουμε:

$$\det A = (-7) \cdot 4 \cdot (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -28 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Την νέα ορίζουσα που προκύπτει την αναπτύσσουμε ως προς την τρίτη στήλη και έχουμε:

$$\det A = (-28)(-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 28(2 \cdot 2 - (-3) \cdot 0) = 112$$

Για τον πίνακα B , επιλέγουμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή κι έχουμε:

$$\begin{aligned}\det B &= 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2(2 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1)) + 4(1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) \\ &= 18 - 28 \\ &= -10\end{aligned}$$

Ερώτημα 10 (1 μονάδα)

Δίνεται η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με $f(x, y, z) = (x + 2y, y - 5z)$.

(α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση είναι γραμμική.

(β) Να βρεθεί ο πυρήνας της απεικόνισης $\ker f$.

(γ) Να βρεθεί η εικόνα της απεικόνισης $\operatorname{Im} f$.

(δ) Με τι είναι ίσο το $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$; Αναμένετε αυτό το αποτέλεσμα;

Λύση:

(α) Έστω $(x_1, y_1, z_1)^\top, (x_2, y_2, z_2)^\top \in \mathbb{R}^3$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}f(\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2)) &= f(\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2, \lambda z_1 + \mu z_2) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_2 + 2(\lambda y_1 + \mu y_2), \lambda y_1 + \mu y_2 - 5(\lambda z_1 + \mu z_2)) \\ &= (\lambda x_1 + 2\lambda y_1 + \mu x_2 + 2\mu y_2, \lambda y_1 - 5\lambda z_1 + \mu y_2 - 5\mu z_2) \\ &= (\lambda x_1 + 2\lambda y_1, \lambda y_1 - 5\lambda z_1) + (\mu x_2 + 2\mu y_2, \mu y_2 - 5\mu z_2) \\ &= \lambda(x_1 + 2y_1, y_1 - 5z_1) + \mu(x_2 + 2y_2, y_2 - 5z_2) \\ &= \lambda f(x_1, y_1, z_1) + \mu f(x_2, y_2, z_2)\end{aligned}$$

(β) Για να βρούμε τον πυρήνα της f , πρέπει να βρούμε τα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία $f(x, y, z) = \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$. Έχουμε:

$$f(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + 2y, y - 5z) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases}$$

Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι $x = -2y$ και από τη δεύτερη $z = y/5$. Θέτοντας $y = k$, έχουμε:

$$\ker f = \{(-2k, k, k/5) : k \in \mathbb{R}\}$$

(γ) Το σύνολο των εικόνων των στοιχείων του $\mathbb{R}^3$ μέσω της f είναι:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{(x + 2y, y - 5z) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) + y(2, 1) + z(0, -5) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}(\{(1, 0), (2, 1), (0, -5)\})\end{aligned}$$

Βάζουμε τα διανύσματα $(1, 0), (2, 1), (0, -5)$ σε γραμμές σε ένα πίνακα A και τον φέρνουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(5)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Ο πίνακας B είναι σε κλιμακωτή μορφή και συνεπώς έχουμε $\dim \operatorname{span}(\{(1, 1), (-1, 0), (0, 1)\}) = 2$. Επομένως, η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης είναι όλο το $\mathbb{R}^2$, δηλαδή $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

(δ) Για μια γραμμική απεικόνιση $f: U \rightarrow V$, γνωρίζουμε ότι $\dim U = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$. Εδώ ισχύει $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Ερώτημα 11 (0.5 μονάδες)

Δίνεται η απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (2x - 3y, x - y)$.

(α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση f είναι ισομορφισμός.

(β) Να βρεθεί η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} .

Λύση: Για να είναι η f ισομορφισμός πρέπει να είναι επί και 1-1. Για να είναι επί θα πρέπει $\text{Im } f \equiv \mathbb{R}^2$, δηλαδή για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, θα πρέπει να υπάρχει $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, με:

$$f(x, y) = (2x - 3y, x - y) = (a, b).$$

Ισοδύναμα, θα πρέπει να έχει λύσεις το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - 3y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

Επιλύουμε με χρήση επαυξημένου πίνακα:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & a \\ 1 & -1 & b \end{array} \right) \xrightarrow[(-1/2)]{} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & a \\ 0 & 1/2 & -(a/2) + b \end{array} \right) \xrightarrow{(2)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -a + 2b \end{array} \right) \xrightarrow{(3)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -2a + 6b \\ 0 & 1 & -a + 2b \end{array} \right) \xrightarrow{(1/2)} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -a + 3b \\ 0 & 1 & -a + 2b \end{array} \right)$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση. Δηλαδή, για κάθε $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, υπάρχει και μάλιστα μοναδικό:

$$(x, y) = (-a + 3b, -a + 2b) \in \mathbb{R}^2,$$

με $f(x, y) = (a, b)$. Άρα η f είναι επί, αφού υπάρχει (x, y) , και επιπλέον είναι 1-1, αφού αυτό είναι μοναδικό δηλαδή $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Άρα η f είναι ισομορφισμός.

(β) Με βάση τα παραπάνω, η αντίστροφη απεικόνιση δίνεται από:

$$f^{-1}(x, y) = (-x + 3y, -x + 2y)$$

Ερώτημα 12 (1 μονάδα)

(α) Να δείξετε ότι το σύνολο $B = \{(-1, 0, 1)^\top, (1, 1, 3)^\top, (1, 3, -1)^\top\}$ είναι μια βάση του χώρου $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

(β) Να κατασκευαστεί μια ορθοκανονική βάση από την B .

Λύση:

(α) Δημιουργούμε τον πίνακα A που περιέχει τα τρία διανύσματα σε στήλες:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του A . Επιλέγουμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη και έχουμε:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(1 \cdot (-1) - 3 \cdot 3) + (1 \cdot 3 - 1 \cdot 1) = 10 + 2 = 12$$

Αφού $\det A \neq 0$, το σύνολο B είναι μια βάση του $\mathbb{R}^3$.

(β) Για να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση, θα ακολουθήσουμε την διαδικασία Gram-Schmidt. Έχουμε τα διανύσματα $v_1 = (-1, 0, 1)^\top$, $v_2 = (1, 1, 3)^\top$ και $v_3 = (1, 3, -1)^\top$. Αρχικά υπολογίζουμε τα διανύσματα:

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1, \quad u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2$$

Έχουμε:

$$\|u_1\| = \|v_1\| = \sqrt{v_1^\top v_1} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\langle v_2, u_1 \rangle = (1, 1, 3) (-1, 0, 1)^\top = 2,$$

Επομένως, το u_2 είναι ίσο με:

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (1, 1, 3)^\top - \frac{2}{2} (-1, 0, 1)^\top = (2, 1, 2)^\top$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$\|u_2\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Επίσης, έχουμε:

$$\langle v_3, u_1 \rangle = (1, 3, -1) (-1, 0, 1)^\top = -2$$
$$\langle v_3, u_2 \rangle = (1, 3, -1) (2, 1, 2)^\top = 3$$

Οπότε το u_3 είναι ίσο με:

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 = (1, 3, -1)^\top - \frac{-2}{2} (-1, 0, 1)^\top - \frac{3}{9} (2, 1, 2)^\top = \left(-\frac{6}{9}, \frac{24}{9}, -\frac{6}{9}\right)^\top = \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\top$$
$$\|u_3\| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

Έτσι, σχηματίζεται η ορθοκανονική βάση $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$, όπου τα w_1, w_2, w_3 είναι ίσα με:

$$w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 0, 1)^\top = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1, 0, 1)^\top$$
$$w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{3} (2, 1, 2)^\top$$
$$w_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\top = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(-\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)^\top$$

Ερώτημα 13 (0.5 μονάδες)

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Με χρήση του θεωρήματος Cayley-Hamilton να υπολογιστεί ο πίνακας $A^3 - A^2 - 8A + 8I$ όπου I είναι ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας.

Λύση: Αρχικά υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -5 & 0 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)((\lambda - 2)(\lambda + 2) - 5) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4 - 5) = \lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda + 9$$

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton προκύπτει ότι

$$\chi_A(A) = \mathcal{O} \Leftrightarrow A^3 - A^2 - 9A + 9I = \mathcal{O}$$

Προσθέτοντας και στα δυο μέρη της παραπάνω ισότητας το $A - I$ παίρνουμε:

$$A^3 - A^2 - 9A + 9I + A - I = A - I \Leftrightarrow A^3 - A^2 - 8A + 8I = A - I$$

Άρα καταλήγουμε ότι:

$$A^3 - A^2 - 8A + 8I = A - I = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ερώτημα 14 (1 μονάδα)

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Βρείτε ένα πίνακα P έτσι ώστε να ισχύει $D = P^{-1}AP$ όπου D διαγώνιος πίνακας.

Λύση: Αρχικά υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & \lambda + 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Αφού ο πίνακας έχει 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές ($\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$), θα έχει υποχρεωτικά και 3 γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και άρα διαγωνοποιείται σύμφωνα με την γνωστή πρόταση.

(α) Για $\lambda_1 = -1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)x = \mathcal{O} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 - \lambda_1 & 0 \\ 2 & -2 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων για την $\lambda_1 = -1$ είναι $(0, x, 2x)^\top$, $x \in \mathbb{R}$, και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι $V(\lambda_1) = \{x(0, 1, 2)^\top : x \in \mathbb{R}\} = \text{span}((0, 1, 2)^\top)$.

(β) Για $\lambda_2 = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)x = \mathcal{O} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 - \lambda_2 & 0 \\ 2 & -2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 3x_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων για την $\lambda_2 = 0$ είναι $(x, x, 3x)^\top$, $x \in \mathbb{R}$, και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι $V(\lambda_2) = \{x(1, 1, 3)^\top : x \in \mathbb{R}\} = \text{span}((1, 1, 3)^\top)$.

(γ) Για $\lambda_3 = 1$ έχουμε:

$$(A - \lambda_3 I)x = \mathcal{O} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda_3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 - \lambda_3 & 0 \\ 2 & -2 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

Άρα η οικογένεια ιδιοδιανυσμάτων για την $\lambda_3 = 1$ είναι $(2x, x, 2x)^\top$, $x \in \mathbb{R}$, και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι $V(\lambda_3) = \{x(2, 1, 2)^\top : x \in \mathbb{R}\} = \text{span}((2, 1, 2)^\top)$.

Συνεπώς, ο διαγώνιος πίνακας και ο πίνακας ομοιότητας είναι οι ακόλουθοι:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Παρατηρήσεις

- Οι μονάδες των ερωτημάτων αθροίζουν σε 11. Ο τελικός βαθμός θα είναι $\min(\text{άθροισμα βαθμών ερωτημάτων που απαντήθηκαν}, 10)$.
- Παρακαλώ δικαιολογήστε επαρκώς όλες τις απαντήσεις σας. Θέματα μη επαρκώς δικαιολογημένα δεν βαθμολογούνται.
- Η εξέταση γίνεται με κλειστά βιβλία και σημειώσεις.
- Τα κινητά σας τηλέφωνα θα πρέπει να είναι απενεργοποιημένα καθόλη τη διάρκεια της εξέτασης.