

Εξέταση Ιουνίου: Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών
Πανεπιστήμιο Πελοποννήσου

Άσκηση 1 (20 βαθμοί)

Δίνεται ένας πίνακας $A[1], A[2], \dots, A[n]$ με n σύμβολα. Ένα σύμβολο x λέγεται συχνό αν εμφανίζεται στηρά περισσότερες από $n/4$ φορές στον πίνακα, δηλαδή αν

$$|\{i \mid A[i] = x\}| > \frac{n}{4}.$$

Ευδιάσετε έναν αλγόριθμο “διαίρει και βασίλευε” που βρίσκει όλα τα συχνά σύμβολα του πίνακα. Αναλύστε την χρονική του πολυπλοκότητα. Να επιχειρηματολογήσετε για την ορθότητα του αλγόριθμου. **ΟΧΛΗ:** η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου πρέπει να είναι $o(n^2)$.

Άσκηση 2 (20 βαθμοί)

Το πρόβλημα απόφασης KNAPSACK το οποίο ορίζεται ως εξής.

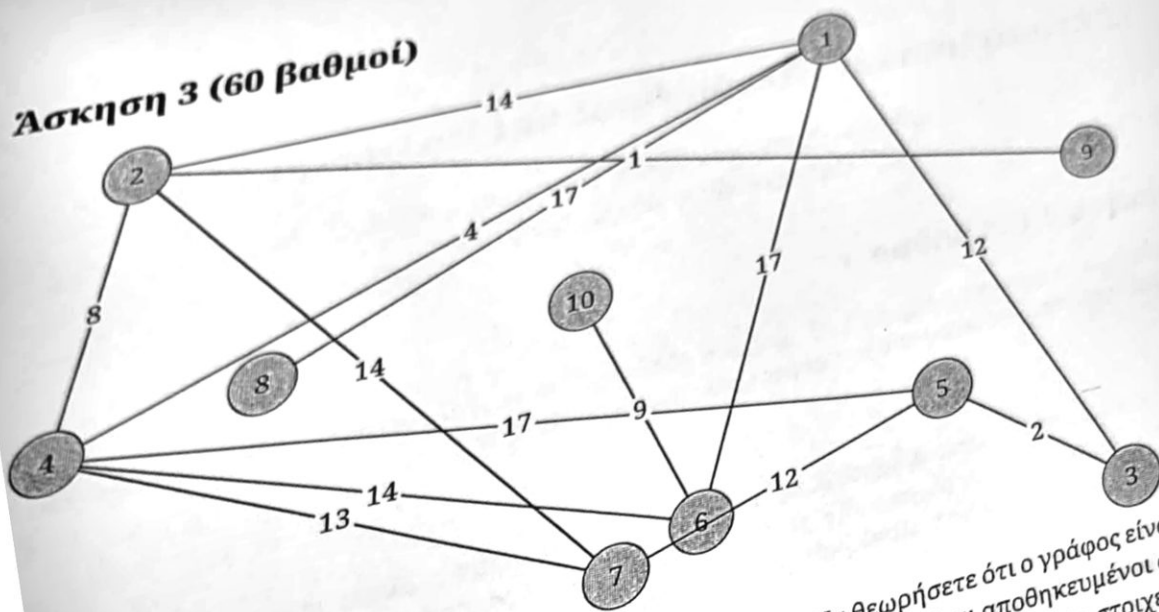
Δεσφ n αντικείμενα. Κάθε αντικείμενο i έχει θετικό ακέραιο βάρος w_i και θετική ακέραια αξία v_i . Δίδονται δύο θετικοί ακέραιοι W και V .

Να βρεθεί υποσύνολο αντικειμένων $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε $\sum_{i \in S} w_i \leq W$ και $\sum_{i \in S} v_i \geq V$. Αν υπάρχει τέτοιο υποσύνολο, η απάντηση είναι 1 (ναί), αλλιώς η απάντηση είναι 0 (όχι).

Να δείξετε ότι το πρόβλημα KNAPSACK ανήκει στην κλάση NP.

Να δείξετε ότι το πρόβλημα με την διαφορά ότι για κάθε είσοδο ισχύει $\sum_{i=1}^n w_i \leq n^{100}$ είναι NP-σκληρό. Δηλαδή $KNAPSACK_{100} \in P$.

Άσκηση 3 (60 βαθμοί)



Παράδειγμα: Το βάρος κάθε ακμής βρίσκεται στην μέση της ακμής. Να θεωρήσετε ότι ο γράφος είναι απλός (χωρίς βρόχους και πολλαπλές ακμές) και να θεωρήσετε ότι οι κόμβοι είναι αποθηκευμένοι σε μια λίστα ως προς τον αριθμό που τους περιγράφει, π.χ. $adj[3] = [(1, 12), (5, 2)]$ (το 1ο στοιχείο της λίστας είναι ο αριθμός-όνομα του κόμβου και το 2ο στοιχείο αντιστοιχεί στο βάρος της ακμής).

Να βρείτε το 3ο επίπεδο κόμβων στην αναζήτηση κατά πλάτος (BFS) με κόμβο εκκίνησης τον κόμβο 1. Ποιοι κόμβοι ανήκουν στο 3ο επίπεδο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Να βρείτε μια ακμή που δεν βρίσκεται σε κανένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Να εκτελέσετε τον αλγόριθμο Dijkstra που ξεκινάει από τον κόμβο 9. Ποιοί είναι οι 4 πρώτοι κόμβοι που θα επιλέξει ο Prim ξεκινώντας την εκτέλεση του από τον κόμβο 9; Ποιοι κόμβοι περιέχονται στο S ακριβώς 4 κόμβους;

Να εκτελέσετε τον αλγόριθμο Floyd-Warshall στον γράφο του σχήματος. Ποιοί είναι οι 4 πρώτοι κόμβοι που θα επιλέξει ο Prim ξεκινώντας την εκτέλεση του από τον κόμβο 9; Ποιοι κόμβοι περιέχονται στο S ακριβώς 4 κόμβους;